

ESTÀTICA ANALÍTICA I GRÀFICA

José Joaquín Rodes Roca, Juan Carlos MorenoMarín,
Tarsicio Beléndez Vázquez i David Israel Méndez Alcaraz
Curs 2011-2012

Departament de Física, Enginyeria de Sistemes i Teoria del Senyal

Universitat d'Alacant

1. Objectius

En aquest bloc temàtic es pretén que l'alumnat comprega els principis fonamentals de l'estàtica i la seua utilització per a la resolució de casos pràctics. També s'ha de comprendre els principis fonamentals de la teoria de l'elasticitat per a la descripció formal del comportament elàstic dels materials de construcció.

Els conceptes fonamentals que s'hauran d'adquirir són:

- Lleis de Newton.
- Concepte d'equilibri.
- Principis de l'estàtica.
- Tipus d'enllaços o lligams.
- Fregament.
- Diagrama de sòlid lliure.
- Mètodes de resolució analítica de sistemes de forces coplanàries.
- Forces distribuïdes. Estabilitat i gir.
- Mètodes de resolució gràfica de sistemes de forces coplanàries.

2. Aplicacions

Els aspectes esmentats anteriorment són de gran interès per al desenvolupament de qualsevol projecte d'enginyeria i/o arquitectura relacionat amb l'edificació i la construcció en general. Concretament s'aplicarà en:

- Anàlisi de les situacions d'equilibri en general.
- Equilibri d'estructures arquitectòniques.

- Elasticitat d'elements resistents.
- Problemes d'hidrostatica.

3. Resum teòric

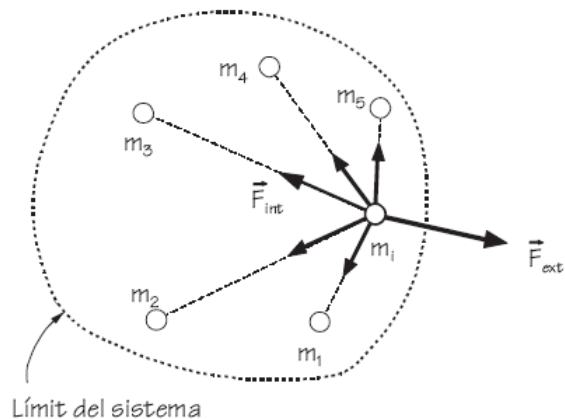
L'arquitectura i la tècnica en general estudien sistemes físics sotmesos a l'acció de forces. Aquestes forces poden tenir els orígens següents: a) el pes dels elements que formen el sistema; b) la cohesió interna entre les diferents parts del sistema; c) l'acció de càrregues exteriors al sistema, transitòries o permanents, puntuals o distribuïdes, etc., i d) les limitacions que altres sistemes imposen al moviment del que es considera.

D'acord amb els principis de la mecànica de Newton, hi ha una relació entre força aplicada sobre un cos o sistema i el seu estat de moviment, on el repòs és un estat de moviment més. D'una manera àmplia, es pot definir l'estàtica com la part de la mecànica que estudia les forces i les condicions sota les quals els cossos sotmesos a forces es troben en equilibri. Per tot això, l'estudi de l'estàtica és primordial per al tècnic constructor, ja que les seues realitzacions han de satisfer la condició necessària d'estar en equilibri estable.

Al llarg dels apartats que formen aquest bloc temàtic tractarem els principis de l'estàtica, amb especial èmfasi en els aspectes que tenen a veure amb l'arquitectura i els problemes que plantegen les construccions arquitectòniques. En particular definirem, amb la major precisió possible, les forces, els tipus de forces i la seua naturalesa física; establirem el concepte d'equilibri en les seues diverses accepcions i, finalment, farem un catàleg sistemàtic dels diferents tipus de forces (siguen forces aplicades exteriors o forces de lligam) que poden actuar sobre un sistema material, considerat aquest com un sòlid rígid. També donarem els criteris bàsics per a la resolució analítica de l'equilibri d'un cos sotmès a un conjunt de forces, i farem un breu repàs dels mètodes gràfics que hi ha per a resoldre els problemes estàtics. A continuació introduïrem els conceptes bàsics relatius als esforços interns que tenen lloc en l'interior d'un cos sotmès a càrregues i sol·licitacions de diferent tipus. Finalment, i en l'últim resum dels continguts de l'assignatura, aplicarem els conceptes exposats en aquest bloc a dos problemes estàtics de gran interès en arquitectura i enginyeria: entramats articulats plans i bigues isostàtiques.

3.1 Principis de l'estàtica

La força es considera la mesura quantitativa de la interacció mecànica entre dos cossos materials o entre parts d'un mateix cos. Aquesta interacció pot ser de **contacte** (els dos cossos es troben en contacte físic) o a **distància** (forces gravitatòries, electromagnètiques...).



També es poden classificar en **internes** i **externes**: són forces internes les que

Figura 7.1 Forces internes i externes en un sistema

exerceixen entre si les distintes parts d'un sistema. La divisió entre forces interiors o exteriors és arbitrària, ja que depèn dels límits que s'imposen al sistema que es vol estudiar. Tot el que quede dins seu es considerarà forces interiors, i tot el que quede fora exercirà sobre l'interior del sistema forces que es denominaran exteriors (fig. 7.1).

Considerarem un cos rígid qualsevol sòlid indeformable sota l'acció de les forces que actuen damunt seu. És a dir, la distància entre dos punts qualssevol d'aquest és manté constant.

Naturalesa vectorial de les forces. Les forces, com a magnituds físiques vectorials que són, es determinen amb: a) un **punt d'aplicació**; b) una magnitud o **mòdul**; c) una **direcció** i, d) un **sentit**. A més a més, les forces són vectors lliscants, i per tant, tot el que hem dit en el primer bloc temàtic del temari serà aplicable aquí.

Concepte d'equilibri. L'equilibri s'entén com una situació de repòs d'un cos respecte d'altres cossos. Es poden distingir **tres tipus d'equilibri**: 1) estàtic; 2) dinàmic; 3) no inercial. **L'equilibri estàtic implica** com a condició necessària que la resultant de totes les forces (externes i internes) que actuen sobre el cos siga nul·la. Noteu que aquest criteri només garanteix que no hi haja moviment de translació, però no impedeix que el cos pugui tenir un moviment de rotació. Per això, a la condició anterior se n'hi afegeix una altra, per la qual el moment resultant de totes les forces siga nul també. Analíticament:

$$\sum_{i=1}^{i=N} \vec{F}_i = \vec{0} , \quad \sum_{i=1}^{i=N} \vec{M}_i = \vec{0}$$

Les propietats que compleixen les forces aplicades sobre un cos perquè aquest es trobe en equilibri l'anomenem **principis de l'estàtica**. Aquests són cinc:

- quan sobre un sòlid lliure¹ actuen només dues forces F_1 , F_2 , aquestes només poden equilibrar-se si es compleix que són iguals i de sentit contrari. Corol·lari: quan sobre un cos actua només una força, el cos no pot estar en equilibri.
- l'acció d'un sistema de forces sobre un cos rígid no es modifica si se li agrega o se li lleva un sistema de forces en equilibri.
- la suma o resultant de dues forces aplicades en el mateix punt és la diagonal del paral·lelogram els costats del qual són les forces esmentades.
- **principi d'acció i reacció** o tercer principi de la dinàmica de Newton.
- **principi de rigidesa**: en condicions d'equilibri, les forces que actuen sobre tot cos deformable satisfan les mateixes condicions que en el cas que el cos siga rígid.

Enllaços o lligams. Es denomina enllaços o lligams tot allò que restringeix el moviment d'un cos en l'espai. Al sòlid sotmès a lligams se l'anomena **sòlid lligat**, sent el concepte oposat el **sòlid lliure**.

En les figures (7.2) i (7.3) es mostraran un conjunt d'exemples de lligams que seran d'utilitat per a la resolució d'exercicis referits a l'equilibri. Es consideraran tant el contacte llis com el rugós (fregament per lliscament) entre el cos i la superfície.

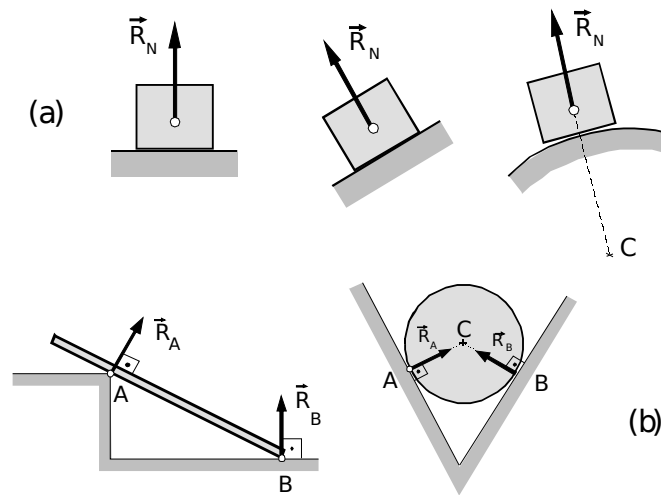


Figura 7.2 Exemples de lligadures de contacte sense fregament

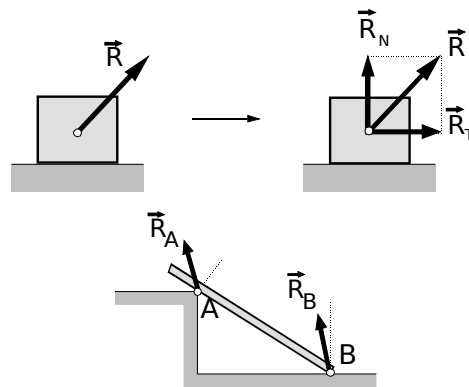


Figura 7.3 Exemples de lligams de contacte amb fregament

En determinades estructures, els suports sobre el terra es fan mitjançant rodes, corrons, sabates, etc., el contacte de les quals es pot considerar llis, de manera que la reacció que actua sobre aquests elements és normal a la superfície de contacte. Alguns exemples de reaccions en suports i dispositius mecànics es mostren en les figures (7.4) i (7.5).

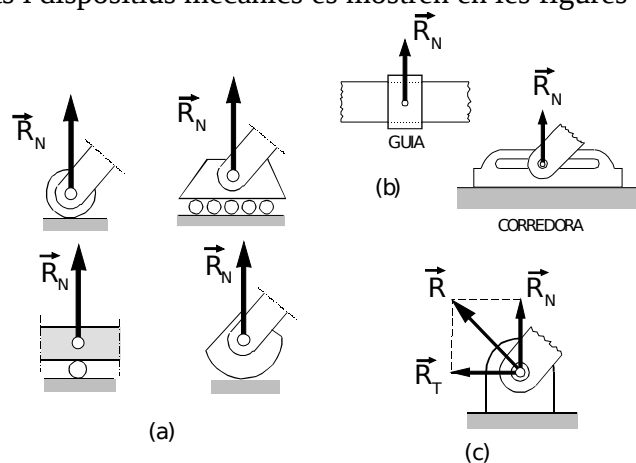


Figura 7.4 Reaccions en suports de corrons, guies i corredors

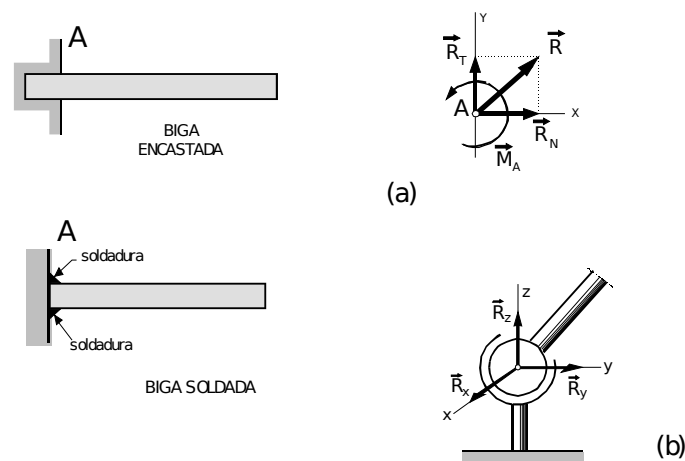


Figura 7.5 *Reaccions en bigues encastades o soldades i en ròtules*

Fregament. Experimentalment es pot comprovar que, en desplaçar un cos sobre un altre, apareix en el pla de contacte dels dos cossos una força de resistència al lliscament relatiu que es diu **força de fregament de lliscament**. L'aparició del fregament està condicionada a dos factors: **1)** la **rugositat** de les superfícies en contacte; **2)** les forces intermoleculars **d'adhesió** entre les superfícies dels dos cossos en contacte.

Lleis empíriques del fregament per lliscament (lleis de Coulomb): **1)** La direcció i el sentit de la força de fregament és l'oposada a la resultant de les forces que intenten desplaçar al cos; **2)** El valor de la força límit de fregament es pot calcular amb la relació $F_{lim} = \mu_e \cdot R_N$, en què μ_e és el **coeficient de fregament estàtic** entre les dues superfícies i R_N , la reacció normal que una de les superfícies fa sobre l'altra; **3)** El valor de la força límit de fregament no depèn, dins un rang de valors bastant gran, de les dimensions de les superfícies en contacte. En resum: la força de fregament que actua sobre un cos en repòs pot expressar-se com $F_{freg} \leq \mu_0 R_N$.

Diagrama de sòlid lliure.: El sòlid lligat pot analitzar-se com un sòlid lliure aplicant el que es denomina **axioma dels lligams**: *tot cos lligat pot considerar-se lliure si se suprimeixen els lligams i se substitueixen les seues accions per les reaccions d'aquests lligams*. Per aclarir aquest axioma considerarem diversos exemples de cossos sotmesos a forces, tant exteriors com de lligam. En tots els casos dibuixarem les forces de lligam com si foren forces exteriors, i el diagrama resultant el denominarem **diagrama de sòlid lliure**. Aquest diagrama és el que usarem més endavant per a l'**anàlisi de l'equilibri** del sòlid, d'ací ve la seua importància.

Per exemple, la figura (7.6) mostra una barra OC, de pes propi no negligible P_b , recolzada en el punt O per un contacte de tipus ròtula. La barra suporta una càrrega exterior P, i la subjecten dos cables AD i CE, respectivament.

El diagrama de sòlid lliure comprèn les forces següents: **1)** la reacció en la ròtula O, R_o , la direcció en l'espai de la qual és arbitrària; **2)** el pes de la barra, P_b , aplicat en el centre de gravetat G de la mateixa; **3)** Les tensions T_A i T_C , aplicades en els punts A i C,

respectivament, i les direccions dels quals són les dels segments AD i CE; 4) la càrrega que suporta la barra, P, aplicada en el punt B de la barra.

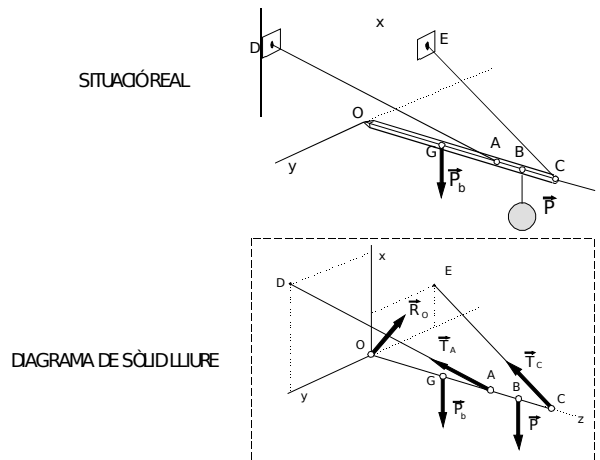


Figura 7.6 Diagrama de sòlid lliure d'una barra subjecta per una ròtula

3.2. Resolució analítica de sistemes de forces coplanàries

Donat un sistema de forces coplanàries es podrien considerar tres casos distints:

- Que el sistema siga equivalent a una sola força \vec{R} , aplicada en el centre del sistema.
- Que el sistema siga equivalent a un moment, que puga expressar-se de la forma \vec{M}_{par} .
- Que el sistema siga nul, és a dir que es trobe en equilibri.

L'interès dels dos primers casos és el d'establir quin seria el sistema equilibrant per a cada situació que es puga plantejar. Per al primer, atès que el sistema és equivalent a una única força, es necessita saber-ne el valor i la línia d'acció (l'eix central del sistema). Per al segon, el sistema és equivalent a un parell arbitrari respecte de qualsevol punt.

L'últim cas és equivalent a un torçor nul i aquesta situació es pot analitzar pel procediment estàndard, és a dir:

$$\vec{R} = \vec{0} \rightarrow R_x = \sum_{i=1}^{i=N} F_{ix} = 0, \quad R_y = \sum_{i=1}^{i=N} F_{iy} = 0$$

$$\vec{M}_O = \vec{0} \rightarrow \sum_{i=1}^{i=N} M_{iO} = 0$$

Estabilitat i gir: es pot enunciar que *tot sòlid rígid sotmès a un sistema de forces coplanàries està en equilibri si el diagrama de sòlid lliure es pot reduir a un sistema de tres forces coplanàries concurrents, sempre que aquest punt de concurrència pertanyi al sòlid.*

En el cas que les forces no siguin concurrents, no hi pot haver equilibri. Per tant, hi haurà possibilitat de bolcar el cos si el **moment de gir, que prenem positiu**, és major que el **moment antigir que tindrà signe negatiu**. Si volem saber si un cos bolcarà o no, ho podem deduir de la comparació dels dos tipus de moment, veient quin d'aquests és el major; o també veient si el moment resultant és positiu o negatiu; o, finalment, veient si la línia d'acció de les forces exteriors queda per damunt o per davall del punt O, respecte del qual es prenen moments.

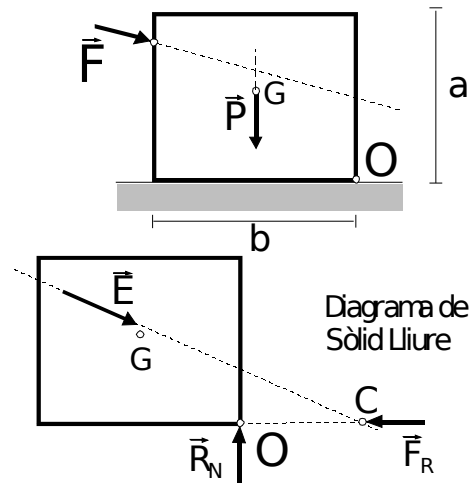


Figura 7.7 Cas que les forces exteriors no passen per la base del cos

3.3. Resolució gràfica de sistemes de forces coplanàries

A partir de la representació gràfica de sistemes de forces coplanàries podem aconseguir els **objectius** següents:

- Determinar gràficament el vector força resultant del sistema.
- Determinar la línia d'acció de la resultat, és a dir, l'eix central del sistema.
- Determinar el valor del moment resultant del sistema.
- Verificar si el sistema de forces està en equilibri.

Aquests objectius es poden assolir a partir del **polígon de forces** del sistema i **polígon funicular** d'aquest últim.

El polígon de forces no és més que la suma vectorial gràfica de les forces que actuen sobre un cos. Precisament, el valor del segment AD és el mòdul de la resultant i també indica la direcció de la resultant (fig. 9.1).

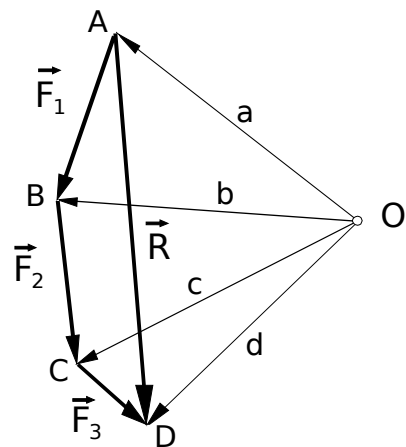


Figura 9.1 Polígon de tres forces i línies polars

Per a determinar la línia d'acció de la resultant, s'ha de construir el **polígon funicular**. Els passos que s'han de fer són:

- Prenem un punt qualsevol O, anomenat **pol**.
- Des del punt O, tracem línies cap als punts A, B, C i D del polígon de forces, anomenades **línies polars**.
- Sobre el sistema original de les forces, tracem els raigs polars que substitueixen les forces inicials obtenint el **polígon funicular del sistema** (fig. 9.2).
- Prolonguem les línies polars inicial i final per a trobar el punt de tall E. La resultant estarà aplicada en E i la paral·lela a la resultant pel punt E ens defineix l'**eix central del sistema**.

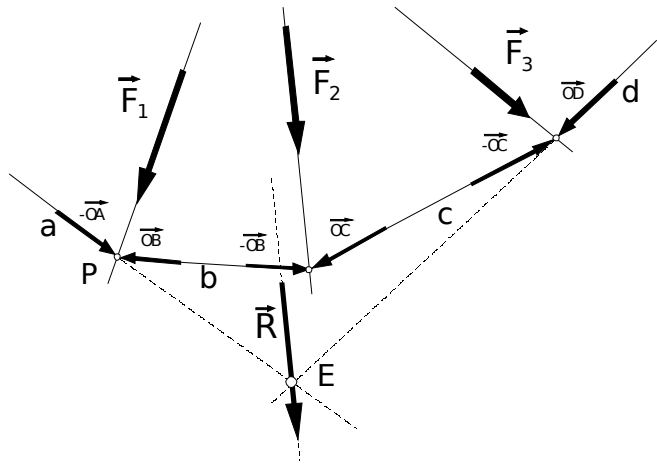


Figura 9.2 Obtenció de la línia d'acció de la resultant mitjançant el polígon funicular

El valor del **moment resultant** del sistema de forces també es pot determinar gràficament (fig. 9.3). Els passos que s'han de fer són:

- Dibuixem el polígon de forces i s'assenyala la magnitud H, distància del pol a la força o **distància polar**.
- Construïm el polígon funicular corresponent.
- S'indica el punt C, respecte del qual volem calcular el valor del moment de la força. Per a això, prolonguem la línia a fins que talle la línia que, passant per C, és paral·lela a la força donada. Sigui C' el punt de tall i C'' el punt de tall d'aquesta última línia amb el costat e del funicular.
- El producte de la distància polar H per la distància C'C'' = h és precisament el valor del moment resultant.

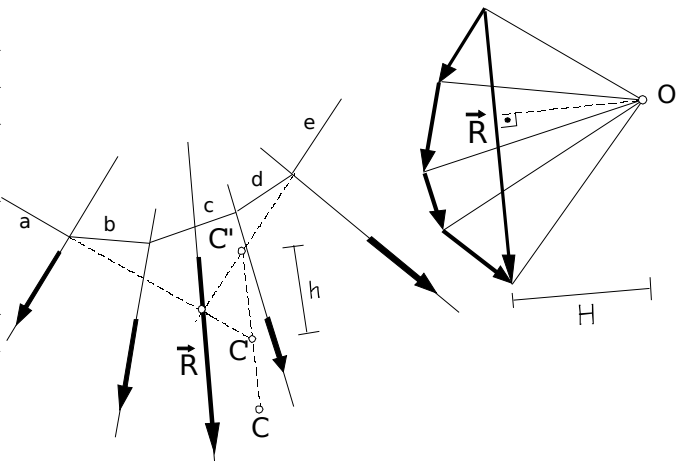


Figura 9.3 Obtenció gràfica del moment resultant d'un sistema de forces coplanàries

Condicions gràfiques per a l'equilibri. Perquè un sistema de forces coplanàries estiga en **equilibri** cal que el seu **torsor** siga **nul**, és a dir, que la seua resultant siga nul·la i que el moment resultant respecte de qualsevol punt del pla siga també nul. Gràficament

aquesta condició es pot resumir com: un sistema de forces coplanàries en **equilibri** tindrà **tancats tant el seu polígon de forces com el seu polígon funicular**.

Un problema interessant i de gran utilitat pràctica és la determinació d'un altre sistema de forces que equilibre l'anterior, format per dues forces paral·leles a la resultant del primer sistema, i que passen per dos punts donats.

Una biga recta, recolzada en els punts A i B, està sotmesa a les càrregues que s'indiquen en la **fig. 9.4**. Les reaccions en els suports han de ser paral·leles a la resultant i, per tant, verticals. A més han de passar pels punts A i B.

Per a determinar les dues reaccions, es dibuixen les dues verticals, que, passant per A i per B, tallen el funicular en els punts A' i B'.

Unint els dos punts s'obté la recta **m**. Traçant en el polígon de forces una polar que es paral·lela a **m**, tallarà la resultant en un punt tal que permet dibuixar les dues reaccions que buscàvem.

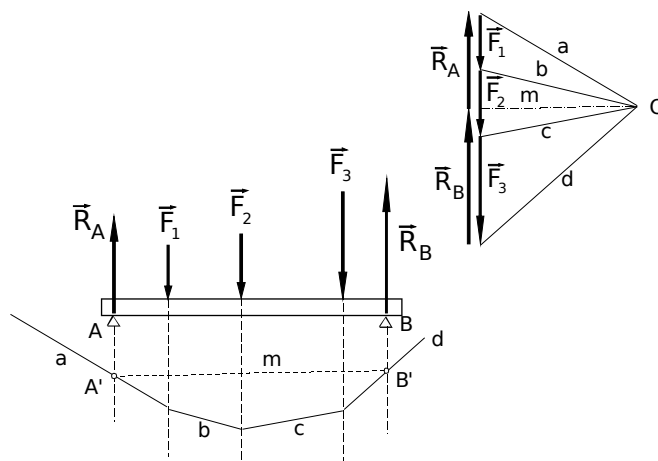


Figura 9.4 Obtenció gràfica de les reaccions en una biga recta birecolzada

4. Bibliografia

Aquest segon bloc es pot consultar/estudiar en els capítols 7, 8 i 9 de la primera referència; 5 de la segona i 12 de la tercera.

Referències

- [1] Rodes Roca, J. J., Durá Doménech, A. i Vera Guarinos, J.: *Fonaments Físics de les Construccions Arquitectòniques* (volum I), Publicacions de la Universitat d'Alacant, 2011.
- [2] Bedford, A. i Fowler, W.: *Mecánica para Ingeniería: estática*, Addison Wesley (Mèxic), 2000.
- [3] Tipler, P. A. i Mosca G.: *Física per a la ciència i la tecnologia*, Editorial Reverté (Barcelona), 2010